Διάλεξη 6η

25/10/2018



# ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Εξίσωση Riccati: $y' + a(x)\cdot y + b(x)\cdot y^2 + d(x) = 0$ : (E)

με $a, b, d \in C(I)$, $d \neq 0$.

αν $y_1$: λύση, τότε $\boxed{y = y_1 + \frac{1}{z}}$ η εξίσωση ανάγεται σε γραμμική εξίσωση α' τάξης

Έχουμε $0 = y_1' + \left(\frac{1}{z}\right)' + a(x)\left[y_1 + \frac{1}{z}\right] + b(x)\left(y_1 + \frac{1}{z}\right)^2 + d(x)$

$$= y_1' - \frac{z'}{z^2} + a(x)y_1 + a(x)\frac{1}{z} + b(x)\left(y_1^2 + \frac{1}{z^2} + 2y_1\frac{1}{z}\right) + d(x)$$

τα $\otimes$ κάνουν μηδέν

και $0 = -\frac{z'}{z^2} + a(x)\frac{1}{z} + b(x)\frac{1}{z^2} + 2b(x)y_1\frac{1}{z}$

$$0 = -z' + a(x)z + b(x) + 2b(x)y_1 z$$

$$0 = -z' + [a(x) + 2b(x)y_1]z + b(x)$$

Παράδειγμα ①: (λυμένο)

$y' - \frac{1}{x}y - x^3y^2 + x^5 = 0$ // $y_1 = x$: λύση

(για $y = x + \frac{1}{z}$): $1 - \frac{z'}{z^2} - \frac{1}{x}\left(x + \frac{1}{z}\right) - x^3\left(x^2 + \frac{1}{z^2} + \frac{2x}{z}\right) + x^5 = 0$, $x \neq 0$

⋮

$$z' + \left(2x^4 + \frac{1}{x}\right)z = -x^3$$

$$z(x) = e^{-\int\left(2x^4 + \frac{1}{x}\right)dx}\left[c + \int -x^3 e^{\int 2x^4 + \frac{1}{x}dx}dx\right]$$

$$= e^{-\frac{2x^5}{5} - \ln|x|}\left[c + \int -x^3 e^{2\frac{x^5}{5} + \ln|x|}dx\right]$$

$= e^{-\frac{2x^5}{5}}\cdot\frac{1}{|x|}\left[c - \int x^3 e^{\frac{2x^5}{5}}|x|\,dx\right]$ ⇝ Δεν μπορεί να περάσει μέσα το $\frac{1}{|x|}$ στο

$= \operatorname{sgn}x \int x^4 e^{2x^5/5}dx$ ⇝ ολοκλήρωμα

$= (\operatorname{sgn}x)\frac{1}{2}\int\left(\frac{2x^5}{5}\right)' e^{2x^5/5}dx$

$= \operatorname{sgn}x\,\frac{1}{2}\,e^{2x^5/5}$

$|x| = x(\operatorname{sgn}x)$

$$= e^{-\frac{2x^5}{5}} \cdot \frac{1}{|x|} ( - e^{-\frac{2x^5}{5}} \cdot \underbrace{\frac{1}{|x|} (sgn\, x)}_{\frac{1}{x}} e^{\frac{2x^5}{5}}$$

κ.τ.λ. ... (Βιβλίο)

**Παράδειγμα 9:** $y' - y + e^{-x} y^2 - e^x = 0$, $y_1 = \kappa e^{\lambda x}$ λύση ($\kappa = ;, \lambda = ;$)

$$\kappa\lambda e^{\lambda x} - \kappa e^{\lambda x} + e^{-x}(\kappa^2 e^{2\lambda x}) - e^x = 0$$

$$\vdots$$

$$\kappa(\lambda-1)e^{\lambda x} + [\kappa^2 e^{2(\lambda-1)x} - 1]e^x = 0$$

Αν $x=0$ : $\kappa(\lambda-1) + \kappa^2 - 1 = 0$

$\Downarrow$ $\quad$ $\Downarrow$

$\lambda = 1$ $\quad$ $\kappa = \pm 1$

άρα $(\kappa,\lambda) = (1,1)$ ή $\kappa = 1, \lambda = -1$

Πως μπαίνει η εκθετική μέσα στην λύση:
Είναι η βάση μη σταθερή αναλλοίωτη ως προς την παραγώγιση : $(1+\frac{1}{n})^n \to e$.

**Άσκηση 11)**

$$y'(t) + y(t) = f'(t) + f(t) \quad | \quad y(t) \underset{t\to+\infty}{\to} f(t) : \lim_{+\infty}[y(t) - f(t)] = 0$$

$$y'(t) - f'(t) = f(t) - y(t)$$

$$y(t) - f(t) = z(t)$$

$$z'(t) = -z(t) = e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$$

Ασκηση 1.2)

$$y'(t) + y(t) = f(t)$$

$$y = 5t + 3$$

$$5t + 3 - \dots \quad 1 \to 0$$

↑ η λύση με ορισμένο σφάλμα αποκλίνει

Ασκηση 1.3)

$$y'(t) + p(t)y(t) = q(t)$$

Λύση της $y(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds}\left[y(t_0) + \int_{t_0}^{t} q(s) e^{\int_{t_0}^{s} p(u)du} ds\right]$ (μη-ομογενής)

$$y(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds} \int_{t_0}^{t} q(s) e^{\int_{t_0}^{s} p(u)du} ds \quad \left(\text{ομογενής}\right)$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : |y(t)| = e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds} \left|\int_{t_0}^{t} q(s) e^{\int p(u)du + \int p(u)du} ds\right| < \varepsilon$$

Το προσεγγίζω με ένα μικρό αριθμό $m$ και παίρνω ένα μεγάλο $t_0$

Ασκηση 1.4)

$$g(t) = \begin{cases} 2, & t \in [0,1] \\ 0, & t > 1 \end{cases} \qquad y(0) = 0$$

Θα πάρω 2 λύσεις: μία για $t \in [0,1]$ και μία για $t > 1$

⋮

$$y(t) = e^{-t}\int_0^t 2e^s ds = 2e^{-t}[e^t - 1], \quad t \in [0,1]$$

$$y(t) = \underbrace{e^{-t}\left[\int_0^1 2e^s ds\right.}_{2(e-1)e^{-t}} \left.+ \int_0^1 \cancel{0}\, ds\right]$$

∃ διάστημα που η παράγωγος είναι....;

→ Όχι

## Άσκηση 1.5)

$$y'(t) - a(t)y(t) = b(t)$$

ολοκλ. σε ένα διάστημα:

$$y(t) = e^{\int_x^t a(s)ds}\left[ y(x) + \int_x^t \quad \right]$$

$$\to \int_x^{\infty} \dots = 0$$

γιατί ορισ. ολ/μη (φραγμένη επί εκθετική)

Τρέχει το όριο στο $+\infty$

$$y(t) = e^{-\int_x^t a(s)ds} \to 0$$

Γενική μορφή: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

$$dy = [-P(x)y + b(x)]dx$$

$$\Leftarrow \frac{dy}{dx} = -P(x)y + b(x)$$

$$\Leftarrow y' + P(x)y = b(x)$$

$$df(x,y) = 0 \to \frac{\partial f}{\partial y}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

$$\Downarrow$$

$$f(x,y) = C$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}dx + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

πλήρες διαφορικό

αν $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$

με ολοκλήρωση θα βρω την $f(x,y)$

Αν $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x} \xrightarrow[\exists f]{} df(x,y) = 0 \Rightarrow f(x,y) = C$

Άσκηση 2, σελ 48)

iii) $\underbrace{(1+y^2+xy^2)}_{M}dx + \underbrace{(x^2y+y+2xy)}_{N}dy = 0, \quad y(1)=1$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y+2xy = \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy+2y$ : είναι ολοκληρώσιμη

$\frac{\partial f}{\partial x} = 1+y^2+xy^2$

$f(x,y) = \int (1+y^2+xy^2)\,dx = x+xy^2+\frac{x^2}{2}y^2 + h(y)$ ← σωστή σταθερά

1ος τρόπος: Θα πρέπει $x^2y+y+2xy = \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy+x^2y+h'(y)$

$\Rightarrow h'(y) = y \Rightarrow h(y) = \frac{y^2}{2}+c$

Άρα $f(x,y) = x+xy^2+\frac{x^2y^2}{2}+\frac{y^2}{2}+c = C$

Οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται απ' τον τύπο:

$x+xy^2+\frac{x^2y^2}{2}+\frac{y^2}{2} = C$

Για $y(1)=1$ .... $\boxed{C=3}$

Άρα $x+xy^2+\frac{x^2y^2}{2}+\frac{y^2}{2} = 3$ .... $\to y = \pm$ ...

Ολοκλ. λύσεις - καμπύλες.

Οι λύσεις είναι οι τιμές με το C.

2ος τρόπος:

$f(x,y) = \int (x^2y+y+2xy)\,dy$

$\int (\ldots)\,dx$

3ος τρόπος: Με ορίζουσα ολοκλήρωση.